Mniej naiwna teoria typów

Agnieszka Kozubek

Językiem współczesnej matematyki jest teoria mnogości. Wszystkie rozważania, nawet te które nie dotyczą podstaw matematyki, prowadzi się z niejawnym założeniem, że używanym systemem formalnym jest teoria mnogości. Jednak nie taki był cel jej powstania. Teoria mnogości rozwinęła się na gruncie pytań o niesprzeczność matematyki. Z tego powodu wszystkie złożone konstrukcje są zbudowane z elementarnych pojęć zbioru i należenia do zbioru. Przywykliśmy do tej myśli i nie zauważamy na co dzień wad tego podejścia. Uwidoczniają się one wtedy, gdy próbujemy pokazać teorię mnogości osobom, które nie miały z nią wcześniej styczności – studentom.

Ucząc się teorii mnogości studenci napotykają trudności. Trudności te biorą się nie tylko z faktu, że przedmiot nauczania jest po prostu trudny i potrzeba czasu, by go opanować. Matematyka w języku teorii mnogości jest inna niż praktyka szkolna, ale jest też inna niż praktyka matematyki pozaszkolnej. Jak często odwołujemy się do definicji pary uporządkowanej Kuratowskiego lub liczb naturalnych von Neumanna? Prawie nigdy. Zazwyczaj pamiętamy i korzystamy tylko z własności tych pojęć, a nie z ich definicji. Jednak ucząc, kładziemy nacisk na właśnie na definicję, a nie na własności, co powoduje późniejszy problemy studentów.

Mniej naiwna teoria typów (LNTT) ma być rozwiązaniem tych problemów. W zamierzeniu jest to system formalny oparty na teorii typów, który ma być wygodnym językiem matematyki, przynajmniej tej elementarnej, pozbawionym wad teorii mnogości. Język teorii typów wydaje się odpowiedni, gdyż pozwala postulować istnienie obiektów poprzez wyspecyfikowanie ich własności, a nie podanie definicji. Co więcej, jako system oparty na wyrażeniach symbolicznych, język teorii typów może stanowić podstawę dla systemu wspomagania dowodzenia.

Do zdefiniowania podstawowego systemu użyliśmy formalizmu zwanego Pure Type Systems (PTS). Jest to najbardziej powszechny sposób definiowania teorii typów, pozwalający na porównywanie różnych systemów. Mniej naiwna teoria typów to pewien szczególny PTS, interesujący także z technicznego punktu widzenia, gdyż jest to jeden z niewielu systemów, w których występuje reguła postaci (s_1, s_2, s_3), gdzie $s_2 \neq s_3$. Udowodniliśmy, że ten PTS ma własność silnej normalizacji, skąd wynika niesprzeczność systemu. Dowód opiera się na translacji do rachunku konstrukcji CC, o którym wiadomo, że ma własność silnej normalizacji. Zaproponowany PTS jest jedynie podstawą dla większego systemu, który dopiero zostanie rozwinięty.