Równania z sumą, przecięciem i dodawaniem w zbiorach liczb naturalnych.

Streszczenie

Rozważamy równania w zbiorach liczb naturalnych postaci

$$X_i = \varphi_i(X_1, \dots, X_n) \quad \text{dla } i = 1, \dots, n$$

gdzie φ_i mogą zwierać operacje $\cap, \cup, +$, przy czym $+$ zdefiniowane jest jako

$$X + Y = \{x + y : x \in X, y \in Y\} .$$

Zajmujemy się najmniejszymi, względem zawierania, rozwiązaniami takich równań, oznaczmy tę klasę jako $\mathcal{E}$. $\mathcal{E}$ zawiera się w EXPTIME oraz zawiera zbiory EXPTIME trudne.

$\mathcal{E}$ ma duża moc wyrażania: dla każdego naturalnego k zbiór S, którego zapis pozycyjny przy podstawie k jest rozpoznawany przez pewien trellis automata nad alfabetem $\{0, 1, \dots, k-1\}$ należy do $\mathcal{E}$. Wynik ten pozwala pokazać nierozstrzygalność podstawowych decyzyjnych dla zbiorów z $\mathcal{E}$, np. równość, niepustość, itp.

Rozważamy też bardziej ogólne równania postaci

$$\psi_i(X_1, \dots, X_n) = \varphi_i(X_1, \dots, X_n) \quad \text{dla } i = 1, \dots, n .$$

Są one w oczywisty sposób silniejsze, dlatego ograniczamy się jedynie do jednej operacji boolowskiej ($\cap$ lub $\cup$) oraz dodawania. W obu przypadkach klasa zbiorów otrzymanych jako najmniejsze rozwiązania pokrywa się z klasą RE, klasa zbiorów otrzymanych jako największe rozwiązania z klasą co-RE, natomiast jedyne rozwiązania zawierają wszystkie zbiory rekurencyjne.

Zajmujemy się też przypadkiem jednego równania. O takich zbiorach wiemy mniej, wciąż jednak umiemy pokazać pewne nietrywialne własności — np. wciąż definiują one zbiory EXPTIME-trudne.